

2 ноября Семинор по жочам.

Задание 1:

Дан процесс авторегр. $AR(2)$:

$$X_t = 1.02^{=\delta} - 0.06 X_{t-1} + 0.19 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

1. Проверить пр-с на стационарность.
2. Найти мат. от. проц.
3. Рассчитать знач. автокоррел. пр-са и построить коррелограмму.

▷ ①: Для того, чтобы пр-с был стац., все корни алгебр. урав. $a(z)=0$

$\Rightarrow$ т.е. корни z ; $|z| > 1$ (вещ. и комплекс.)
Волжны лежать
вне един. круга

$$X_t + 0.06 X_{t-1} - 0.19 X_{t-2} :$$

$$1 + 0.06 z - 0.19 z^2 = 0$$

$$0.19 z^2 - 0.06 z - 1 = 0 \quad D = 0.06^2 + 4 \cdot 0.19 = 0.7636$$

$$z = \frac{0.06 \pm 0.87}{0.38} = \begin{bmatrix} -2.13 \\ 2.45 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{оба вне един. круга}$$

$\Rightarrow$ X_t - стационарный

$$\textcircled{2} \quad E(X_t) = \mu = \frac{\delta}{1 - a_1 - a_2} = \frac{1.02}{1 + 0.06 - 0.19} = \frac{1.02}{0.87} = \underline{\underline{1.17}}$$

③ Применяем урав. Юла-Уокера: $p=2$.

$$p(k) = a_1 p(k-1) + a_2 p(k-2) + \dots + a_p p(k-p), \quad k > 0$$

$$\Rightarrow p(k) = -0.06 p(k-1) + 0.19 p(k-2)$$

$$p(0) = 1, \quad p(-1) = p(1) \text{ симметричность}$$

$$p(1) = -0.06 p(0) + 0.19 p(-1) \Rightarrow$$

$$p(1) - 0.19 p(1) = -0.06$$

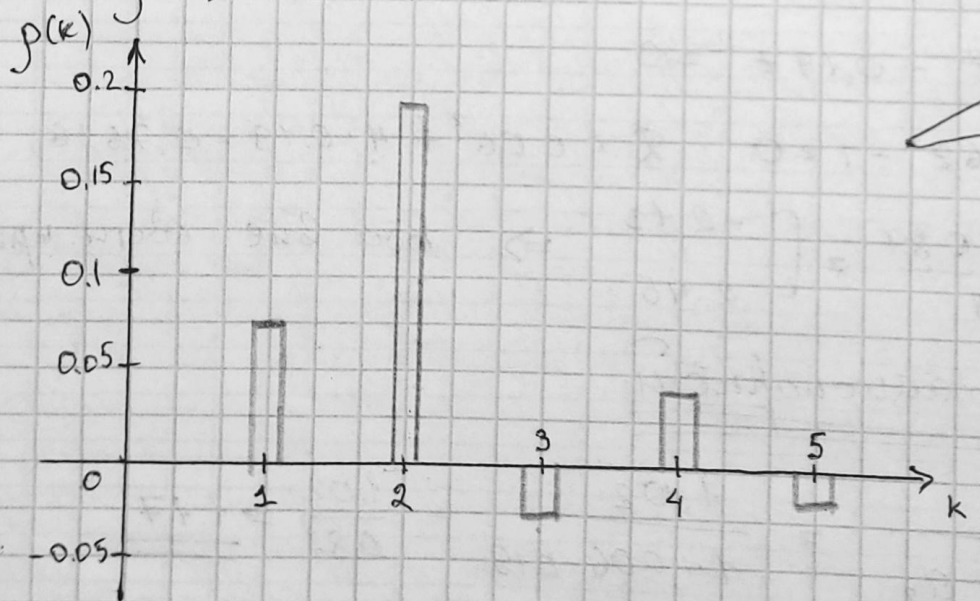
$$p(1) = \frac{-0.06}{1-0.19} = \underline{\underline{-0.074}}$$

$$p(2) = -0.06 p(1) + 0.19 p(0) = -0.06 \cdot (-0.074) + 0.19 = \underline{\underline{0.194}}$$

$$p(3) = -0.06 p(2) + 0.19 p(1) = \underline{\underline{-0.025}}$$

$$p(4) = -0.06 p(3) + 0.19 p(2) = 0.037$$

$$p(5) = -0.0048$$



коррелограмма

9 ноября Семинар по эконом.

Ф-во некое-х формул из лекции:

$$\begin{aligned} 1) E((X_t - EX_t)^2) &= \{ X_t - \mu = \varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1} \} = \\ &= E((\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1})^2) = E(\varepsilon_t^2 + 2b\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + b^2\varepsilon_{t-1}^2) = \\ &= E\varepsilon_t^2 + 2bE\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + b^2E\varepsilon_{t-1}^2 = (1+b^2)\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) E((\varepsilon_t + b\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} + b\varepsilon_{t-2})) &= \\ &= E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + b\varepsilon_{t-1}^2 + b\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-2} + b^2\varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t-2}) = \\ &= bE\varepsilon_{t-1}^2 = b\sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

3) Для общего случая:

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= E((X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)) = E((b(L)\varepsilon_t) \cdot (b(L)\varepsilon_{t-k})) = \\ &= \{ X_t - \mu = b(L)\varepsilon_t \} = \{ b(L) = 1 + b_1L + \dots + b_qL^q \} = \\ &= E(b^2(L)\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-k}) = E((\varepsilon_t + b_1L\varepsilon_t + \dots + b_qL^q\varepsilon_t) \cdot \\ &\quad \cdot (\varepsilon_{t-k} + b_1L\varepsilon_{t-k} + \dots + b_qL^q\varepsilon_{t-k})) \quad \textcircled{=} \end{aligned}$$

L - оператор запаздывания / оператор лаг:

$$LX_t = X_{t-1} \Rightarrow L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$$

$$L^k X_t = X_{t-k} \Rightarrow L^q \varepsilon_t = \varepsilon_{t-q}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} E((\varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + \dots + b_q\varepsilon_{t-q}) \cdot (\varepsilon_{t-k} + b_1\varepsilon_{t-k-1} + \dots + b_q\varepsilon_{t-k-q})) \\ = b_{t-k} \cdot b_0 \cdot \sigma^2 + b_{t-k-1} \cdot b_1 \sigma^2 + \dots = \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j \cdot b_{j+k} \right) \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Задача 2

Дан пр-сс скользящего среднего $MA(3)$:

$$X_t = 0.632 + \varepsilon_t - 4.7\varepsilon_{t-1} + 0.148\varepsilon_{t-2} + 0.371\varepsilon_{t-3}$$

Рассчитать знач-я автокорреляций пр-са и построить коррелограмму.

$$\triangleright \rho(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j \cdot b_{j+k} \right) / \left(\sum_{j=0}^q b_j^2 \right), & k=0, 1, \dots, q \\ 0, & k=q+1, q+2, \dots \end{cases}$$

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = \sum_{j=0}^3 b_j^2 = b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$$

$$X_t = \underbrace{\mu}_{0.632} + \underbrace{b_0}_{1} \varepsilon_t + \underbrace{b_1}_{-4.7} \varepsilon_{t-1} + \underbrace{b_2}_{0.148} \varepsilon_{t-2} + \underbrace{b_3}_{0.371} \varepsilon_{t-3}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\varepsilon}^2 = 1^2 + (-4.7)^2 + (0.148)^2 + (0.371)^2 = \underline{\underline{23.25}}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{3-1} b_j \cdot b_{j+1} &= \sum_{j=0}^2 b_j \cdot b_{j+1} = b_0 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2 + b_2 \cdot b_3 = \\ &= 1 \cdot (-4.7) + (-4.7) \cdot 0.148 + 0.148 \cdot 0.371 = -5.340692 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \rho(1) = \frac{-5.340692}{23.25} = \underline{\underline{-0.229}}$$

$$k=2, q=3$$

$$\sum_{j=0}^1 b_j \cdot b_{j+2} = b_0 \cdot b_2 + b_1 \cdot b_3 = 1 \cdot 0.148 + (-4.7) \cdot 0.371 = -1.5957$$

$$\Rightarrow \rho(2) = \frac{-1.5957}{23.25} = \underline{\underline{-0.068}}$$

Задача 3.8

Проверьте, что для ~~процесса~~ ~~случайного блуждания~~ $x_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}$, где ε_t - пр-сс белого шума, выпол-ся условие стационарности в широком смысле.

▷ Опр. временной ряд x_t явл-ся стационар. в шир. см. если выполнены след. усл:

1) $E(x_t) = \mu \quad (\text{const})$

2) $D(x_t) = \sigma^2 \quad (\text{не зав. от } t)$

3) $\text{Cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \gamma(\tau) \quad \forall t \text{ и } \tau.$

(1): $E(x_t) = E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) = E\varepsilon_t + E\varepsilon_{t-1} = 0$

(2): $D(x_t) = E((x_t - E(x_t))^2) = E((\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})^2) =$
 $= E(\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}^2) =$
 $= E\varepsilon_t^2 + 2E\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1} + E\varepsilon_{t-1}^2 = (1+1^2)\sigma_\varepsilon^2 = 2\sigma_\varepsilon^2$

(3): $\text{Cov}(x_t, x_{t+\tau}) = \text{Cov}(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+\tau} + \varepsilon_{t+\tau-1}) =$
 $= \text{Cov}(E(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}) \cdot (\varepsilon_{t+\tau} + \varepsilon_{t+\tau-1})) =$
 $= E(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+\tau} + \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t+\tau-1} + \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t+\tau} + \varepsilon_{t-1} \cdot \varepsilon_{t+\tau-1}) =$
 $= \text{не знаю}$

Задача 3.13

Дана информация об автокоррел. ф-ии процесса авторегрессии второго порядка $AR(2)$ без свободного члена:

$$\rho(1) = 0.5, \quad \rho(2) = 0.4$$

Опр-те знач. параметра при регрессоре X_{t-1} .

▷

$$X_t = \delta + a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2}$$

найти a_1 ?

$$\rho(k) = a_1 \rho(k-1) + a_2 \rho(k-2)$$

$$\rho(0) = 1, \quad \rho(-1) = \rho(1)$$

$$\begin{cases} \rho(1) = a_1 \cdot 1 + a_2 \rho(1) = 0.5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho(2) = a_1 \cdot \rho(1) + a_2 \cdot 1 = 0.4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow a_2 = 0.4 - a_1 \rho(1) = 0.4 - 0.5 a_1$$

↓ в (1)-е уравн:

$$a_1 + (0.4 - 0.5 a_1) \cdot 0.5 = 0.5$$

$$a_1 - 0.25 a_1 = 0.3$$

$$0.75 a_1 = 0.3 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0.4}$$

$$\Rightarrow a_2 = 0.4 - 0.5 \cdot 0.4 = 0.5 \cdot 0.4 = 0.2$$

Задача 3.12

К временному ряду подбирается обратимая модель скользящего среднего 1-го порядка. Выверочной коэф-т автокоррел. с лагом 1 $= -0.35$.

Опр-ть знач. парам. θ_1 при скольз. ср.

$$\triangleright \rho(1) = -0.35.$$

$$\rho(1) = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$$

$$\Rightarrow \theta = -0.35 - 0.35\theta^2$$

$$0.35\theta^2 + \theta + 0.35 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0.35^2 = 0.51.$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{0.51}}{0.7} = \frac{-1 \pm 0.71}{0.7} = \begin{cases} \ominus -2.44 \\ \oplus -0.408 \approx -0.41 \end{cases}$$

Задача 3

Дан пр-сс авторегр. скользящего среднего ARMA(1,1):

$$X_t = -0.12X_{t-1} + \varepsilon_t + 0.18\varepsilon_{t-1}$$

- 1) Проверить процесс на стационарность.
- 2) Найти эквивал. MA(∞) представл.
- 3) Если возможно, найти экв. AR(∞) предст.

▷ (1): Пр-сс стационарен, если все корни урав. $a(z) = 0$ лежат вне един. круга $|z| \leq 1$.

$$a(L) = 1 - (a_1L + a_2L^2 + \dots + a_pL^p)$$

p=1 : $1 - a_1L = 0$ $a(z) = 1 + 0.12z$

$$1 - (-0.12)z = 0 \Rightarrow z = -8.33 \quad \begin{array}{l} \text{лежит} \\ \text{вне круга} \end{array}$$

стационарен ←

(2) $c_0 = 1$.

$$c(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \frac{b(z)}{a(z)}$$

$$b(z) = 1 + 0.18z$$

$$\begin{array}{r} 0.18z + 1 \quad | \quad 0.12z + 1 \\ \hline 0.12z + 1 \quad | \quad 1 + 0.06z - 0.0072z^2 + 0.000864z^3 - \dots \\ \hline 0.06z \quad \quad \quad c_0 \quad c_1 \quad \quad \quad c_2 \quad \quad \quad c_3 \\ \hline 0.06z + 0.0072z^2 \\ \hline - 0.0072z^2 \\ \hline - 0.0072z^2 - 0.000864z^3 \\ \hline - 0.000864z^3 \\ \hline 0.000864z^3 + 0.00010368z^4 \\ \hline - 0.00010368z^4 \end{array}$$

(3) Всп-ая усл. обратимости: корни $\varphi(z) \neq 0$ лежат вне $ед. круга$
 $\Rightarrow \exists$ экв. предст. $X_t : AR(\infty)$:

$$d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)}$$

$$\begin{array}{r} 0.12z + 1 \quad | \quad 0.18z + 1 \\ \underline{0.18z + 1} \quad | \quad 1 - 0.06z + 0.0108z^2 - 0.001944z^3 + 0.0003492z^4 \\ -0.06z \quad \quad \quad d_1 \quad \quad \quad d_2 \quad \quad \quad d_3 \quad \quad \quad d_4 \\ \hline -0.06z - 0.0108z^2 \\ \quad \quad \quad \underline{0.0108z^2} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0.0108z^2 + 0.001944z^3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{-0.001944z^3} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -0.001944z^3 - 0.0003492z^4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{0.0003492z^4} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0.0003492z^4 - 0.0000629856z^5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \end{array}$$

$$d_1 = -a_1 + b_1 = 0.06$$

$$d_2 = -b_1 \cdot d_1 = (-a_1 + b_1)b_1$$

$$d_3 = b_1^2 \cdot d_1$$

$$d_4 = -b_1^3 \cdot d_1$$

...

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} (-a_1 + b_1) b_1^{j-1} X_{t-j}$$

для (2):

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1) a_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}$$

Задача 3.10

Дана след. информ. об обратимой ARMA(p,q) модели временного ряда X_t :

- $E X_t = 0$

- автокоррел. ф-я $\rho_1 = -0.4, \rho_k = 0, k = 2, 3, 4, \dots$

Определите коэф-т этой модели.

▷ Т.к. $\rho_k = 0, k = 2, 3, 4, \dots \Rightarrow q = 1$

$\Rightarrow X_t = \varepsilon_t + b \varepsilon_{t-1}$

$$\rho(1) = \frac{b}{1+b^2} = -0.4$$

$$-0.4b^2 - 0.4 = b$$

$$0.4b^2 + b + 0.4 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 0.4^2 = 0.36$$

$$b_{1,2} = \frac{-1 \pm 0.6}{0.8} = \begin{cases} \ominus -2 & \phi \\ \oplus \underline{\underline{-0.5}} & \text{входит в ед. круг} \end{cases}$$

16 ноября Семинар по экономике.

Ф-во. формул из лекции:

$$1) X_t = [1 + (\alpha + \beta)L + \alpha(\alpha + \beta)L^2 + \alpha^2(\alpha + \beta)L^3 + \dots] \varepsilon_t$$

Посчитаем дисперсию:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= E[(\varepsilon_t + (\alpha + \beta)(L + \alpha L^2 + \alpha^2 L^3 + \dots)\varepsilon_t)^2] = \\ &= E[\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t(\alpha + \beta)(L\varepsilon_t + \alpha L^2\varepsilon_t + \alpha^2 L^3\varepsilon_t + \dots) + \\ &+ (\alpha + \beta)^2(L\varepsilon_t + \alpha L^2\varepsilon_t + \alpha^2 L^3\varepsilon_t + \dots)^2] = \underbrace{\left\{ L\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1} \right\}}_{=0} = \\ &= E[\varepsilon_t^2 + 2\varepsilon_t(\alpha + \beta)(\varepsilon_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-2} + \alpha^2\varepsilon_{t-3} + \dots) + \\ &+ (\alpha + \beta)^2(\varepsilon_{t-1} + \alpha\varepsilon_{t-2} + \alpha^2\varepsilon_{t-3} + \dots)^2] = \\ &= \sigma_\varepsilon^2 (1 + (\alpha + \beta)^2(1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \dots)) \end{aligned}$$

$$2) X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} \quad | \cdot X_{t-1} \Rightarrow \text{мат. ожид.}$$

$$E(X_t \cdot X_{t-1}) = E(\alpha X_{t-1} \cdot X_{t-1}) + E(\varepsilon_t \cdot X_{t-1}) + E(\beta \varepsilon_{t-1} \cdot X_{t-1})$$

$$= \alpha \cdot E(X_{t-1}^2) + \underbrace{E(\varepsilon_t \cdot X_{t-1})}_0 + \beta E(\varepsilon_{t-1} \cdot X_{t-1}) =$$

$$= \alpha \cdot \gamma(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2 \Rightarrow \boxed{\gamma(1) = \alpha \cdot \gamma(0) + \beta \sigma_\varepsilon^2}$$

$$3) \text{Найти } \gamma(2): X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} \quad | \cdot X_{t-2} \Rightarrow$$

$$E(X_t \cdot X_{t-2}) = \alpha E(X_{t-1} \cdot X_{t-2}) + \underbrace{E(\varepsilon_t \cdot X_{t-2})}_0 + \beta \underbrace{E(X_{t-2} \varepsilon_{t-1})}_0 =$$

$$= \alpha \cdot \gamma(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma(2) = \alpha \cdot \gamma(1)} \Rightarrow \gamma(k+1) = \alpha \gamma(k) \Rightarrow \rho(k+1) = \alpha \rho(k)$$

4) На 6-ой стр. рассм-ся пример 1:

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

— процесс нестационарный,

потому что корень $= 1$, а если

взять разность $X_t - X_{t-1} = \Delta X_t$, то

$\Delta X_t = y_t = \varepsilon_t$ яв-ся стационарным.

вопросы 10-17
(из 20 стр.)

5) Также на 6-ой стр. показ-м стац-ть:

$$X_t = \alpha + \beta t + \delta t^2 + \varepsilon_t$$

— ряд нестационарный (мат. ожид. зависит от времени)

$\Rightarrow$ возьмем разность:

$$\begin{aligned}\Delta X_t &= X_t - X_{t-1} = \alpha + \beta t + \delta t^2 + \varepsilon_t - (\alpha + \beta(t-1) + \delta(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1}) \\ &= \cancel{\alpha} + \beta t + \delta t^2 + \varepsilon_t - \cancel{\alpha} - \beta t + \beta - \delta t^2 + 2\delta t - \delta - \varepsilon_{t-1} = \\ &= \beta + 2\delta t - \delta + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ возьмем еще одну разность

$$\Delta^2 X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} \quad (=)$$

$$\begin{aligned}\Delta X_{t-1} &= X_{t-1} - X_{t-2} = \alpha + \beta(t-1) + \delta(t-1)^2 + \varepsilon_{t-1} - \\ &\quad - (\alpha + \beta(t-2) + \delta(t-2)^2 + \varepsilon_{t-2}) = \\ &= \cancel{\alpha} + \beta t - \beta + \delta t^2 - 2\delta t + \delta + \varepsilon_{t-1} - \cancel{\alpha} - \beta t + 2\beta - \delta t^2 + 4\delta t - 4\delta - \varepsilon_{t-2} \\ &= \beta - 3\delta + (\varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) + 2\delta t.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ominus & \beta + 2\delta t - \delta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - (\beta + 2\delta t - 3\delta + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) = \\ & = \cancel{\beta + 2\delta t - \delta + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}} - \cancel{\beta + 2\delta t - 3\delta} - \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} = \\ & = 2\delta + \varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}. \end{aligned}$$

— яв-ая стационарными.

Задача 3.16

Расши-ая модель авторегр.-скольз. среднего
АРМА(1,1):

$$y_t = 0.8 y_{t-1} + 3 + \varepsilon_t - 0.3 \varepsilon_{t-1}$$

Найти знач. автокоррел. ф-ии $\rho(1)$.

$$\triangleright \rho(1) = \frac{(\alpha + \beta)(1 + \alpha\beta)}{1 + \beta^2 + 2\alpha\beta}$$

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \varepsilon_t + \beta \varepsilon_{t-1} \Rightarrow \alpha = 0.8, \beta = -0.3$$

$$\Rightarrow \rho(1) = \frac{(0.8 - 0.3)(1 - 0.24)}{1 + 0.09 - 0.48} \approx \underline{\underline{0.62}}$$

Задача 1 (продол. 3.16).

1) $z_t = 2y_t$, $\Delta z = z_t - z_{t-1}$ станд.?

— да, станд.

2) $z_t = y_t + 1$: Мат. ожид. $z_t = E(y_t) + 1$
 Дисп. $z_t = \text{Дисп. } y_t \Rightarrow \text{станд.}$
 Cov $z_t = \dots$

$$3) Z_t = \Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

$$\text{Мат. ожид. } Z_t = 0.$$

$$\text{Дисп. } Z_t = E((y_t - y_{t-1})^2) - 0 =$$

$$= E(y_t^2) - 2 E y_t \cdot E y_{t-1} + E(y_{t-1}^2) =$$

$$= D y_t + D y_{t-1} + (E y_t)^2 + (E y_{t-1})^2 - 2\gamma(1)$$

$$\text{Cov}(Z_t, Z_{t-\tau}) = \text{Cov}(y_t - y_{t-1}, y_{t-\tau} - y_{t-\tau-1}) =$$

$$= E((y_t - y_{t-1})(y_{t-\tau} - y_{t-\tau-1})) =$$

$$= E(y_t \cdot y_{t-\tau} - y_{t-1} \cdot y_{t-\tau} - y_t \cdot y_{t-\tau-1} + y_{t-1} \cdot y_{t-\tau-1}) =$$

$$= \gamma(\tau) - \gamma(\tau-1) - \gamma(\tau+1) + \gamma(\tau)$$